

電気回路の基本：電力と実効値

（読んでほしい人：電気系以外の高専生と大学生）

2015/7/20 舞鶴高専 平地克也

前回および前々回の技術メモ（No.20150707 と No.20150525）に続いて電気回路の基本の説明です。これで電気回路の基本は一応完了です。

交流回路の電力

電力は電圧×電流なので、図1のような直流回路では抵抗の消費電力 $P = VI$ となります。オームの法則 $V = IR$ を代入すれば次の式が成立します。

$$P = VI = I^2R = V^2 / R \quad \dots (1)$$

図2のような交流回路では少し複雑になります。交流回路でも電力は電圧×電流に違いはありませんが交流回路では電圧と電流は時々刻々変化しているので電力も時間によって変化します。よって、交流回路の電力は時間の関数 $p(t)$ となります。電源電圧が正弦波の場合は $p(t)$ は次のように計算されます。なお V_p と I_p は電圧と電流のピーク値です。

$$v(t) = V_p \sin \omega t \text{ [V]}$$

$$i(t) = I_p \sin \omega t \text{ [A]}$$

$$p(t) = v(t) i(t) = V_p I_p \sin^2 \omega t = V_p I_p \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \text{ [W]}$$

この3つの式をグラフに表すと図3となります。電力 $p(t)$ はピーク値が $V_p I_p$ で周波数が電圧電流の2倍で大きく脈動する値となります。例えば1kWの電気ストーブに60Hz100Vの電圧を与えるとその消費電力 $p(t)$ は図3のように周波数120Hzで大きく脈動しますが、発熱量は平均化された一定の値となります。発電に必要な燃料の消費量も $p(t)$ の平均値で決まります。したがって交流回路では $p(t)$ の平均値 P が重要な値であり、交流回路で単に「電力」と言った場合は $p(t)$ の平均値を意味します。例えば、1kWの電気ストーブ、100Wの電球と言った場合は1kWや100Wは $p(t)$ の平均値です。なお、 $p(t)$ は瞬時電力と言います。式で表すと次のようになります。

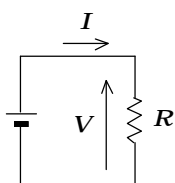


図1

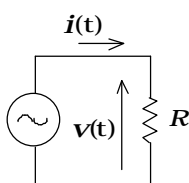


図2

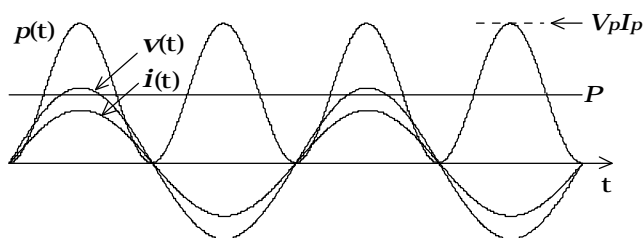


図3 正弦波交流の電圧、電流、電力の変化

$$\text{電力 } P = \text{瞬時電力 } p(t) \text{ の平均値} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt \text{ [W]} \quad \dots (2)$$

電源電圧が正弦波の場合は次のようになります。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} V_p I_p \sin^2 \omega t d\omega t = \frac{1}{2p} V_p I_p \frac{1}{2} \int_0^{2p} (1 - \cos 2\omega t) d\omega t \\ &= \frac{1}{2} V_p I_p \text{ [W]} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

実効値

直流なら電圧と電流は常に一定の値ですが、交流は値が常に変化するのでその大きさをどのように表現すべきか検討が必要です。図4に方形波、正弦波、三角波を示します。3つ共ピーク値は同じ値 V_p ですが、ピーク点とゼロクロス点以外の部分の大きさは「方形波 > 正弦波 > 三角波」となります。そこで、交流波形の大きさの表し方として「実効値」が定義されています。

実効値：同じ抵抗を接続した場合同じ消費電力となる直流値を実効値と言う
 例えば図2において抵抗 R の消費電力が 100W だったとします。図1において $V = 10$ [V]の時に抵抗 R の消費電力が 100W になるならば交流電圧 $v(t)$ の実効値は 10[V]です。

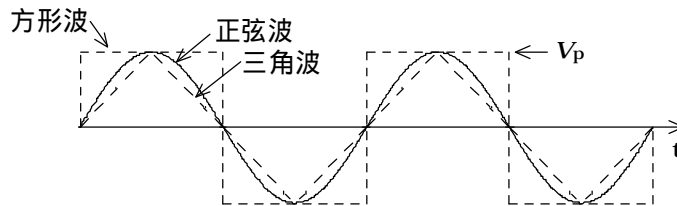


図4 3種類の波形

実効値は次のように計算されます。式(2)にオームの法則 $v(t) = i(t)R$ を適用して、

$$\text{電力 } P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = \frac{1}{TR} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2(t) dt$$

この電力 P が式(1)で表される直流回路の電力に等しいので次の2つの式が成立します。

$$V^2 / R = \frac{1}{TR} \int_0^T v^2(t) dt$$

$$I^2 R = \frac{R}{T} \int_0^T i^2(t) dt$$

よって、 $v(t)$ 、 $i(t)$ の実効値 V 、 I はそれぞれ次の式で表されます。

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \text{ [V]}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \text{ [A]}$$

よって、実効値は瞬時値を2乗して平均してルートした値です。 $v(t)$ が正弦波の時、実効値 V は次のように計算されます。

$$v(t) = V_p \sin \omega t \text{ [V]}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_p^2 \sin^2 \omega t d\omega t} = V_p \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\omega t) d\omega t} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \text{ [V]}$$

よって、正弦波では実効値はピーク値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となります。ちなみに三角波では $\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり、方形波で

はピーク値と同じ値となります。 $V_p = \sqrt{2} V$ と $I_p = \sqrt{2} I$ を式(3)に代入すると正弦波交流の電力 $P = VI$ となります。オームの法則を代入すると次の式が成立します。

$$P = VI = I^2R = V^2 / R$$

これは式(1)と同じです。よって、実効値を使うと抵抗の電力は交流回路でも直流回路と同じ式で計算できることが確認できます。このように実効値は便利な値であり、交流回路の電圧、電流の大きさの表現方法として適切な値と言えます。そこで特に断らない限り交流回路の電圧、電流の大きさは実効値で表すことが電気の世界の習慣となっています。例えば一般家庭の配電電圧は 100V ですが、これは配電電圧の実効値が 100V であることを意味しています。

以上