平地研究室技術メモ No.20150707

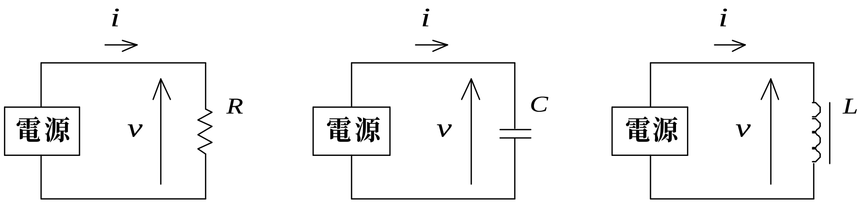
電気回路の基本：正弦波交流の計算方法

（読んでほしい人：電気系以外の高専生と大学生）

2015/7/7 舞鶴高専 平地克也

前回の平地研究室技術メモ[1]では図１のように抵抗、コンデンサ、リアクトルのそれぞれについて電圧と電流の関係式を導出しました。これらの式は抵抗、コンデンサ、リアクトルの基本的な性質に基づいて導出されたものなので、あらゆる場合に常に成立します。例えば電源が直流でも交流でも、または正弦波でも方形波でも、常に成立します。

商用電源は正弦波で供給されているので、電源が正弦波の場合の電圧電流の計算は特に重要です。電源が正弦波の場合は電源電圧は $v=\sqrt{2}V\sin wt$ [V] で表されるので、前回の技術メモではこの式を図１の式に代入して図２に示す電流の式を導出しました。図２のように正弦波交流の電圧電流は三角関数で表現されますが、三角関数は単純な足し算や引き算でさえ簡単には計算できません。しかし正弦波交流では並列回路や直列回路など沢山の計算が必要です。そこで、正弦波交流独特の便利な計算方法が確立されており、電気系の学生は半年ぐらいの時間をかけて詳しく学習します。本技術メモではその計算方法の重要事項を電気系以外の学生のために分かり易く説明します。

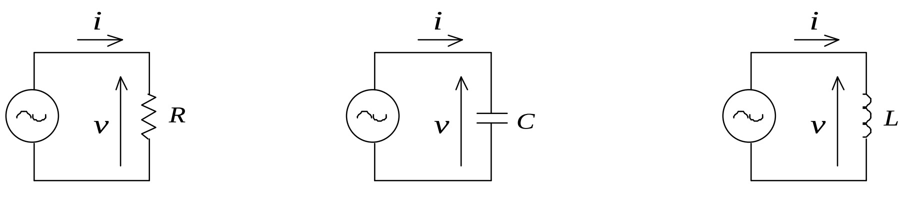


$v = Ri$ $\qquad$ $v=\frac{1}{C}\int idt$ $\qquad$ $i=\frac{1}{L}\int vdt$

$i=\frac{v}{R}$ $\qquad$ $i=C\frac{dv}{dt}$ $\qquad$ $v=L\frac{di}{dt}$

(a) 抵抗 (b) コンデンサ (c) リアクトル

図１ 電圧と電流の関係式



$i=\frac{\sqrt{2}V}{R}\sin wt$ [A] $\qquad$ $i=\sqrt{2}VwC\sin\left(wt+\frac{p}{2}\right)$[A] $\qquad$ $i=\frac{\sqrt{2}V}{wL}\sin\left(wt-\frac{p}{2}\right)$[A]

図２ 正弦波交流での電圧と電流の関係式

■三角関数での計算

図３(a)の回路は抵抗とコンデンサの並列回路です。この回路の電流 i の計算を考えます。電源電圧 v を $v = \sqrt{2}V \sin wt$ [V] とすると図２から、$i_R = \dfrac{\sqrt{2}V}{R} \sin wt$ [A]、$i_C = \sqrt{2}VwC \sin\left(wt + \dfrac{p}{2}\right)$[A]となります。$i$ は i_R と i_C の合計なので、

$$i = i_R + i_C = \frac{\sqrt{2}V}{R}\sin wt + \sqrt{2}VwC\sin\left(wt + \frac{p}{2}\right) \text{ [A]}$$

となります。この計算はかなり面倒ですが、三角関数のいろんな公式を使って次のように求まります。

$$i = \sqrt{2}V\sqrt{\frac{1}{R} + (wC)^2}\,\sin\left(wt + \tan^{-1} wCR\right) \text{ [A]}$$

これで正弦波電流の振幅と位相が分かります。このように図３(a)の回路では三角関数でどうにか計算できますが、図３(b)の回路ではかなり難しそうです。図３(c)ではさらに難しそうです。

このように、正弦波交流の電圧電流を三角関数で計算するのは大変面倒ですが、図３(a)(b)(c)のような回路は実際によく使われる回路であり、簡単に計算できる必要があります。そこで、三角関数以外の方法で正弦波交流を表示する方法が考えられました。

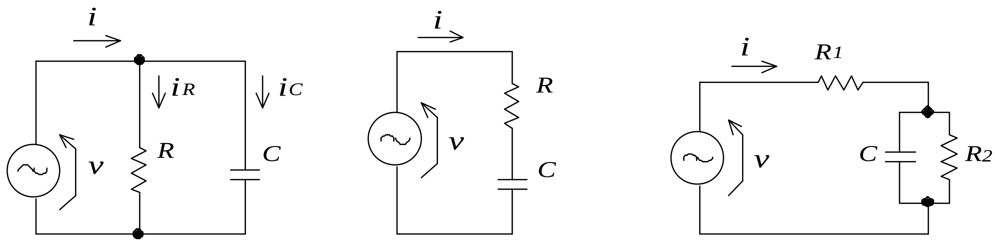


図３ 正弦波交流回路

■正弦波交流の電圧電流の表示方法

正弦波交流の電圧 v と電流 i は三角関数では一般に次のように表わされます。

$$v(t) = \sqrt{2}V\sin(wt + q) \text{ [V]}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(wt + q) \text{ [A]}$$

v と i は時間の関数なので丁寧に書けば上記のように v(t)、i(t)となりますが(t)は省略しても OK です。V と I は電圧と電流の「実効値」と呼ばれる値であり、正弦波ピーク値の 1／$\sqrt{2}$ の大きさです。正弦波交流の電圧、電流の大きさはピーク値ではなく、実効値で表します。例えば一般家庭用の配電電圧は 100V ですが、これは「ピーク値が 100V」ではなく、「実効値が 100V」です。実効値については別途詳しく説明します。θは位相であり、ある基準の正弦波に対する遅れ進みを表します。基準の正弦波は電源電圧を使う場合が多く、例えば図４の回路では電源電圧 v を基準として

$$v = 100\sqrt{2}\sin wt \quad \text{[V]} \qquad ・・・・(1)$$

と表し、電流 i は v に対して 90 度進むので

$$i = 10\sqrt{2}\sin\left(wt + \frac{p}{2}\right)\ \text{[A]} \quad \cdots\cdots (2)$$

と表します。

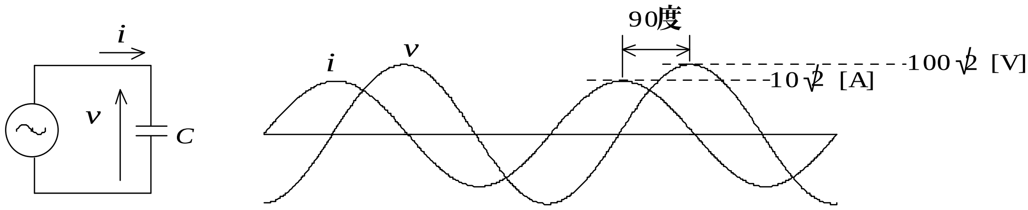


図４

以上のように正弦波交流は実効値と位相の 2 つの値が分かれば完全に記述することができます。したがって、実効値と位相の 2 つの値が分かるのであれば、必ずしも三角関数を使って表示する必要はありません。例えば、図 4 の電圧電流は次のように表示しても OK です。

$\dot{V}$ ＝100∠0° [V] ・・・・(3)

$\dot{I}$ ＝10∠90° [A] ・・・・(4)

(3)(4)のような表示方法を極座標表示と言い、電圧、電流は $\dot{V}$ $\dot{I}$ のように大文字に「ドット」を付けて表示します。また、(1)(2)のような三角関数での表示方法を瞬時値表示と言い、電圧電流は vi のように小文字で表します。

■複素数表示

実効値と位相は大きさと角度なので図５のように複素平面を使って電圧電流を表すこともできます。電流の実効値（大きさ）I と位相（角度）θで複素平面上の 1 点 $\dot{I}$ が指定されます。この場合 $\dot{I}$ の実部は $I\cos\theta$、虚部は $I\sin\theta$ となるので、この電流は

$\dot{I} = I\cos\theta + I\sin\theta\,\mathrm{i}$ [A]

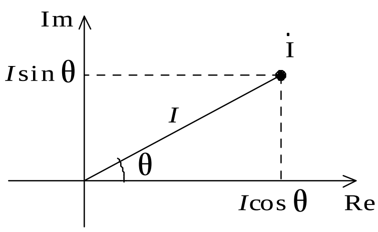


図５ 複素平面

と表すことができます。ただし、この式の i は虚数単位の i ですが、電流を表す記号 i と混同してしまいます。したがって、電気の世界では虚数単位として i ではなく j を使います。また、電気の世界では虚数単位は数値の前に記載します。よって、

$\dot{I} = I\cos\theta + \mathrm{j}I\sin\theta$ [A]

が電気の世界の正統な表記方法です。図４の電圧 v と電流 i を複素数表示で記載すると次のようになります。

$\dot{V}$ ＝100cos0°＋j100sin0°＝100 [V] ・・・・(5)

$\dot{I}$ ＝10cos90°＋j10sin90°＝j10 [A] ・・・・(6)

三角関数では足し算や引き算が大変面倒ですが、複素数なら簡単です。通常、正弦波交流の計算は全て複素数で行います。

以上、正弦波交流の 3 つの表示方法を説明しました。表１にまとめます。表２に図４の場合の表示

例を示します。

表１　正弦波交流の３つの表示方法

	瞬時値表示	極座標表示	複素数表示
電圧	$v(t)=\sqrt{2}V\sin(wt+q)$ [V]	$\dot{V}=V\angle\theta$ [V]	$\dot{V}=V\cos\theta+\mathrm{j}V\sin\theta$ [V]
電流	$i(t)=\sqrt{2}I\sin(wt+q)$ [A]	$\dot{I}=I\angle\theta$ [A]	$\dot{I}=I\cos\theta+\mathrm{j}I\sin\theta$ [A]

表２　図４の電圧電流の表示方法

	瞬時値表示	極座標表示	複素数表示
電圧	$v(t)=100\sqrt{2}\sin wt$ [V]	$\dot{V}=100\angle 0°$ [V]	$\dot{V}=100$ [V]
電流	$i(t)=10\sqrt{2}\sin\left(wt+\dfrac{p}{2}\right)$ [A]	$\dot{I}=10\angle 90°$ [A]	$\dot{I}=\mathrm{j}10$ [A]

■インピーダンス

図２で示したように、電源電圧を $v=\sqrt{2}V\sin wt$ [V]　とした時電流 i とその実効値 I はそれぞれ次の式で表されます。

抵抗：　$i=\dfrac{\sqrt{2}V}{R}\sin wt$ [A]　・・・・実効値 $I=\dfrac{V}{R}$ [A]

コンデンサ：　$i=\sqrt{2}VwC\sin\left(wt+\dfrac{p}{2}\right)$ [A]　・・・・実効値 $I=VwC$ [A]

リアクトル：　$i=\dfrac{\sqrt{2}V}{wL}\sin\left(wt-\dfrac{p}{2}\right)$ [A]　・・・・実効値 $I=\dfrac{V}{wL}$ [A]

電源電圧の実効値は V なので、$Z=V\div I$ とすると Z は次の式で表されます。

抵抗：　$Z=R$ [Ω]

コンデンサ：　$Z=\dfrac{1}{wC}$ [Ω]

リアクトル：　$Z=wL$ [Ω]

Z を「インピーダンス」と言います。抵抗ではオームの法則が成立し、$V=IR$ ですが、前回の技術メモ[1]で説明したようにコンデンサやリアクトルではオームの法則が成立せず電圧と電流の関係は微積分で表されます。しかし正弦波交流ではインピーダンス Z を使うと $V=IZ$ となりコンデンサとリアクトルの電圧電流の実効値がオームの法則と同じ形で計算できます。なお、インピーダンスの単位は抵抗の単位と同じく[Ω]です。

＜計算例＞

図２の回路で $V=100$[V]、$R=100$Ω、$C=100$μF、$L=100$mH、周波数 f＝60Hz、角周波数ω＝2πf＝377 とすると、

抵抗では、　$Z=R=100$Ω　　$I=V\div Z=100\div 100=1$A

コンデンサでは、　$Z=\dfrac{1}{wC}=26.5\Omega$　　$I=V\div Z=100\div 26.5=3.77\mathrm{A}$

リアクトルでは、　$Z=\omega L=37.7\Omega$　　$I=V\div Z=100\div 37.7=2.65\mathrm{A}$

■複素インピーダンス

このようにインピーダンスを使うと電圧電流の実効値が容易に計算できますが、次は電圧電流の複素数表示での計算を考えます。図２の回路で電源電圧を $v=\sqrt{2}V\sin wt$ [V]とすると電源電圧の複素数表示は

$$\dot{V}=V\cos 0^\circ+\mathrm{j}V\sin 0^\circ=V+\mathrm{j}0=V$$

となります。電流の複素数表示 $\dot{I}$ は次のように計算されます。

抵抗：　実効値 $I=\dfrac{V}{R}$　$\theta=0^\circ$　$\dot{I}=I\cos 0^\circ+\mathrm{j}I\sin 0^\circ=\dfrac{V}{R}$ [A]

コンデンサ：実効値 $I=VwC$　$\theta=90^\circ$　$\dot{I}=I\cos 90^\circ+\mathrm{j}I\sin 90^\circ=\mathrm{j}VwC$ [A]

リアクトル：実効値 $I=\dfrac{V}{wL}$　$\theta=-90^\circ$　$\dot{I}=I\cos(-90^\circ)+\mathrm{j}I\sin(-90^\circ)=-\mathrm{j}\dfrac{V}{wL}$ [A]

前記のように、電圧の実効値 V を電流の実効値 I で割った値をインピーダンス Z と言いましたが、電圧の複素数表示 $\dot{V}$ を電流の複素数表示 $\dot{I}$ で割った値を「複素インピーダンス」と言い、$\dot{Z}$ で表します。

$$Z=V\div I$$

$$\dot{Z}=\dot{V}\div\dot{I}$$

上記の電流の複素数表示 $\dot{I}$ の式から明かなように、抵抗、コンデンサ、リアクトルの複素インピーダンスは次のように表されます。

抵抗：　$\dot{Z}=\dot{V}\div\dot{I}=V\div\dfrac{V}{R}=R$ [Ω]

コンデンサ：　$\dot{Z}=\dot{V}\div\dot{I}=V\div \mathrm{j}VwC=\dfrac{1}{jwC}$ [Ω]

リアクトル：　$\dot{Z}=\dot{V}\div\dot{I}=V\div\left(-\mathrm{j}\dfrac{V}{wL}\right)=jwL$ [Ω]

複素インピーダンスを使うと正弦波交流回路の電圧電流が非常に簡単に計算できます。

■複素インピーダンスを使った電圧電流計算例

図３(a)(b)(c)の回路の電流 i の実効値 I と位相 θ を計算します。電源は 100[V]60Hz、$R=100\Omega$、$C=100\mu\mathrm{F}$、$L=100\mathrm{mH}$、$R_1=50\Omega$、$R_2=30\Omega$、角周波数 $\omega=2\pi f=377$ とします。各部品の複素インピーダンスは次のように計算されます。

$$\dot{Z}_{\mathrm{R}}=R=100\Omega$$

$$\dot{Z}_{\mathrm{C}}=\frac{1}{jwC}=-\mathrm{j}26.5\Omega$$

$$\dot{Z}_{\mathrm{L}}=jwL=\mathrm{j}37.7\Omega$$

$\dot{Z}_{R1}=R_1=50\Omega$

$\dot{Z}_{R2}=R_2=30\Omega$

図３(a)の計算

$\dot{I}_R=\dot{V}\div\dot{Z}_R=100\div100=1\mathrm{A}$

$\dot{I}_C=\dot{V}\div\dot{Z}_C=100\div(-j26.5)=j3.77[\mathrm{A}]$

$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_C=1+j3.77\ [\mathrm{A}]$

実効値 $I=\left|\dot{I}\right|=\sqrt{1^2+3.77^2}=3.90\mathrm{A}$

位相 $\theta=\tan^{-1}(3.77/1)=75.1°$

図３(b)の計算

全体のインピーダンス $\dot{Z}=\dot{Z}_R+\dot{Z}_C=100-j26.5\ [\Omega]$

$\dot{I}=\dot{V}\div\dot{Z}=100\div(100-j26.5)=0.934+j0.248\ [\mathrm{A}]$

実効値 $I=\left|\dot{I}\right|=\sqrt{0.934^2+0.248^2}=0.966\mathrm{A}$

位相 $\theta=\tan^{-1}(0.248/0.934)=14.9°$

図３(c)の計算

全体のインピーダンス $\dot{Z}=\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_C\parallel\dot{Z}_{R2}=50+\dfrac{1}{\dfrac{1}{-j26.5}+\dfrac{1}{30}}=63.1-j14.9\ [\Omega]$

$\dot{I}=\dot{V}\div\dot{Z}=100\div(63.1-j14.9)=1.50+j0.354\ [\mathrm{A}]$

実効値 $I=\left|\dot{I}\right|=\sqrt{1.50^2+0.354^2}=1.54\mathrm{A}$

位相 $\theta=\tan^{-1}(0.354/1.50)=13.3°$

■参考文献

[1] **平地克也、「電気回路の基本：コンデンサとリアクトルの電圧と電流の関係」、平地研究室技術メモ** No. 20150525

以上